

Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală

7 februarie 2026

Clasa a X-a

Barem de notare

Subiectul I (21p)

a) Fie $x = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$.

Atunci: $x^3 = 6\sqrt{3} + 10 - (6\sqrt{3} - 10) - 3\sqrt[3]{108 - 100} \cdot x = 20 - 6x$

$x^3 + 6x - 20 = 0$4p

$(x - 2)(x^2 + 2x + 10) = 0$3p

Singura soluție reală este $x = 2$, care este număr natural.....2p

b) Observăm că (1,1,1) este soluție.....3p

Vom demonstra că este singura soluție: Dacă $x < 1$, din fiecare ecuație a sistemului vom obține: $y > 1, z < 1, x > 1$ care este o contradicție.

Analog pentru $x > 1$ 3p

c) Inegalitatea este echivalentă cu: $x - 2 + \frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} \geq 5$3p

Aceasta este adevărată conform inegalității mediilor aplicată numerelor

$x - 2, \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}$3p

Subiectul II (21p)

a) $a^{x+1} = abcd, b^{y+1} = abcd, c^{z+1} = abcd, d^{t+1} = abcd$ 4p

Logaritmăm: $x + 1 = \log_a(abcd), y + 1 = \log_b(abcd), z + 1 = \log_c(abcd),$
 $t + 1 = \log_d(abcd)$ 3p

Apoi $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{t+1} = \log_{abcd} a + \log_{abcd} b + \log_{abcd} c + \log_{abcd} d$

$$= \log_{abcd}(abcd) = 1 \dots\dots\dots 2p$$

- b) $b = a^{\frac{4}{3}}$, $d = c^{\frac{5}{6}}$. Cum a, b, c, d sunt numere naturale, rezultă că există x și y numere naturale, astfel încât $a = x^3$ și $c = y^6$3p

Relația din enunț devine $y^6 - x^3 = 37$3p

$(y^2 - x)(y^4 + y^2x + x^2) = 37$3p

37 este număr prim.

Convine doar $y = 2$ și $x = 3$. Atunci $a=27$, $b=81$, $c=64$, $d=32$, $b-d=49$3p

Subiectul III (21p)

- a) Într-o interpretare geometrică, mulțimea M corespunde intersecției cercurilor $\mathcal{C}(0,1)$ și $\mathcal{C}(3i, r)$4p

Atunci M are un singur element dacă cele două cercuri sunt tangente exterioare, pentru $r=2$ sau tangente interioare pentru $r=4$5p

Este evident că se ia în calcul și soluția algebrică.

- b) Observăm că $x = y = z = 0$ este soluție.....3p

În continuare, vom căuta soluțiile nenule

Trecând la module, obținem prin adunarea celor trei egalități $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = |x| \cdot |y| + |y| \cdot |z| + |z| \cdot |x| \Rightarrow |x| = |y| = |z| = r > 0$3p

Sistemul devine
$$\begin{cases} xr = z^2 \\ yr = x^2 \\ zr = y^2 \end{cases} \text{ de unde}$$

$$x = \frac{z^2}{r}, y = \frac{x^2}{r} = \frac{z^4}{r^3} \Rightarrow z = \frac{y^2}{r} = \frac{z^8}{r^7} \Rightarrow z^7 = r^7 \dots\dots\dots 3p$$

Atunci $z = r\varepsilon$, unde ε este oricare din rădăcinile de ordinul 7 ale unității.

Deci, $x = r\varepsilon^2$, $y = r\varepsilon^4$, $r \in (0, \infty)$. Atunci $(x, y, z) = (r\varepsilon^2, r\varepsilon^4, r\varepsilon)$3p

Subiectul IV (21p)

- a) Fie $f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = 1$, deci f nu este injectivă.....4p

b) Fie x_1, x_2 din $(0, \infty)$, $x_1 > x_2$

$$\begin{aligned}
 f(x_1) - f(x_2) &= x_1 - x_2 + \sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} - \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1} = \\
 &= x_1 - x_2 + \frac{x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1}} = \\
 &= \frac{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1} + x_1 + x_2 - 1)}{\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1}} > \\
 &> \frac{(x_1 - x_2)(\sqrt{x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + \frac{1}{4}} + x_1 + x_2 - 1)}{\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1}} = \\
 &= \frac{(x_1 - x_2)(|x_1 - \frac{1}{2}| + |x_2 - \frac{1}{2}| + x_1 + x_2 - 1)}{\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1}} \geq \\
 &\geq \frac{(x_1 - x_2)(|x_1 + x_2 - 1| + x_1 + x_2 - 1)}{\sqrt{x_1^2 - x_1 + 1} + \sqrt{x_2^2 - x_2 + 1}} \geq 0
 \end{aligned}$$

Deci f este strict crescătoare, de unde rezultă injectivitatea.....**6p**

Fie $y \in (1, \infty)$. Demonstrăm că ecuația $f(x) = y$ are soluție în $(0, \infty)$.

$$x + \sqrt{x^2 - x + 1} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = y - x$$

Impunem condiția $x \leq y$, apoi ridicăm la pătrat:

$$x^2 - x + 1 = y^2 - 2yx + x^2 \Leftrightarrow x(2y - 1) = y^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y - 1} \text{ care este } > 0 \text{ și } \leq y$$

pentru $y \in (1, \infty)$. Deci f este surjectivă.....**5p**

Observație: Se poate argumenta bijectivitatea din unicitatea soluției ecuației $f(x) = y$

$$\text{Pentru rezolvarea ecuației } (f \circ f)(x) = x, \text{ observăm că } f(x) = x + \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} > x$$

Cum f este strict crescătoare rezultă că $f(f(x)) > f(x)$, adică $x > f(x)$, care este o contradicție. Prin urmare, ecuația nu are soluții.....**6p**